UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 16 y 18 de junio de 2009.

Temas :
Bases ortonormales y proyecciones en R^n.
Espacios con producto interno.
Complemento ortogonal. Algoritmo de Gram-Schmidt.
Secciones 4.9, 4.11, del texto.

Observación importante:
es muy importante que Usted resuelva también muchos ejercicios del texto.

E1a) Verifique que los dos vectores $\mathbf{u}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $\mathbf{v} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ forman una base ortonormal para el subespacio H, de R^3, definido por: $H=\{(x, y, z)\in R^3 \mid 2x-y-2z = 0\}$;
E1b) halle $\mathbf{w} = \text{proy}_H(\mathbf{m})$, siendo $\mathbf{m}= (1, 3, -2)$;
E1c) verifique que el vector $\mathbf{m}$-$\mathbf{w}$ = $\mathbf{m}$ - $\text{proy}_H(\mathbf{m})$ es ortogonal a los dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$;
E1d) diga si es cierto o falso que $\mathbf{m}$-$\mathbf{w}$ también es ortogonal a todo vector de H ;
E1e) exprese el vector $\mathbf{h}= (1, 0, 1)$ ($\in$ H) como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

E2. Sea W subespacio de R^4 , sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base ortonormal de W y sean **a** un genérico vector de R^4, **b** un genérico vector de W;
E2a. Escriba la fórmula que expresa la proyección, $\text{proy}_W(\mathbf{a})$, del vector **a** sobre W;
E2b. Escriba la fórmula que expresa el vector **b** como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

E3. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base para cierto subespacio vectorial de R^5 y sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ los primeros tres vectores de una base ortonormal de W, obtenidos aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$;
explique con detalle, como se construye, a partir de $\mathbf{v}_4$, un vector $\mathbf{v}_4'$ perpendicular a los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ y como luego se halla el cuarto vector, $\mathbf{u}_4$, para completar la base ortonormal de W.

E4.- Use el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de R^3 a partir de la base : $\mathbf{v_1}= (1, 0, 1)$, $\mathbf{v_2}= (1, 1, 0)$, $\mathbf{v_3}= (1, 1, 1)$.

E5.- Use el algoritmo de Gram-Schmidt para completar $\{\mathbf{u}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}) , \mathbf{v} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$ a una base ortonormal de R^3 .

E6.- Sea $H = \text{gen}\{(2, 3, 0, 6), (6, 2, 0\text{-}3)\} \subseteq R^4$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E6a) Demuestre que el subconjunto, $H^{\perp}$, de R^4 , formado por todos los vectores de R^4 que son ortogonales a todos los vectores de H, es un <u>subespacio vectorial</u> de R^4
[este subespacio de llama el "complemento ortogonal de H" y se indica usualmente con $H^{\perp}$];

E6b) Exprese el vector **w**=(1, 2, 1, 1) como suma **w**= **h**+**p** de un vector **h**$\in$ H con un vector **p**$\in$ $H^{\perp}$;

E6c) demuestre que si **w**= **a**+**b** , con **a**$\in$ H. **b**$\in$ $H^{\perp}$, entonces necesariamente **a**=**h**, **b**= **p** .

E7.- Sea H el subespacio de R^3 definido por H=gen{(1, 0, 1), (2, 1, 0), (1,-1, 3)} y sea **w** =(3, 4, 1) ;
E7a. halle una base ortonormal para H, usando el algoritmo de Gram-Schmidt ;
E7b.- halle $\text{proy}_H(w) = \mathbf{w}_1$;
E7c. halle $H^{\perp}$ (= complemento ortogonal de H);
E7d.- halle $\text{proy}_{H^{\perp}}(w) = \mathbf{w}_2$;
E7e.- verifique que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$.

Observación importante.
En general, si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ son las proyecciones de un vector, **w**, sobre cierto subespacio, W, y sobre su complemento ortogonal, $W^{\perp}$, se tiene $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}$.
Como las fórmulas para hallar proyecciones no son las más sencillas que uno pueda desear, ni tampoco es sencilla la construcción de una base ortonormal. en el caso que se busque una de las dos proyecciones (o ámbas), ya sea sobre W, ya sea sobre $W^{\perp}$, conviene hallar la proyección sobre aquel subespacio (de los dos W, $W^{\perp}$) que tiene menor dimensión.
En particular en el caso de este ejercicio, más sencillo era hallar
$\mathbf{w}_2 = \text{proy}_{H^{\perp}}(w)$ y luego hallar $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w} - \mathbf{w}_2$.

E8. Escriba la definición de producto interno en un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales , adaptando la definición 1 de la sección 4.11 del texto [pag. 439 en la v edición y 432 en la vi edición] al caso en que todos los números que se consideran sean reales [tome en cuenta que entonces todo número coincide con su conjugado].

E9. Recordando que en R^2 y R^3 , el módulo de un vector y la perpendicularidad de dos vectores se puede expresar por medio del producto escalar [que es un caso particular de producto interno], explique como se pueden generalizar , en un espacio vectorial con producto interno, las definiciones de : **i**) módulo de un vector , **ii**) condición de perpendicularidad de dos vectores.

E10. a) Demuestre que con $< f , g > = \int_0^2 f(x)g(x)dx$ se define un producto interno en el espacio vectorial, P_2, de todos los polinomios de grado ≤ 2 ;
E10b) halle el módulo de los vectores 1, x, x^2+x-1 (usando el producto interno asignado);

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

E10c) halle todos los vectores de P_2 que sean ortogonales al vector x (con el mismo producto interno);

E11.- En el espacio vectorial P_1 de todos los polinomios de grado menor o igual que 1, considere el producto interno definido por : $< f , g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$;

halle una base ortonormal para este espacio vectorial.

E12.-Dé un ejemplo de producto interno en cada uno de los siguientes espacios vectoriales :
E12a) P_3 ; **E12b)** $M_{2,2}$.

E13.- Considere el producto interno en R^2 definido por :
$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = 2u_1v_1+u_2v_1+u_1v_2+2u_2v_2$, siendo $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$;
E13a) halle $\|(1, 0)\|$;
E13b) averigüe si es cierto o falso que los dos vectores (1, 3), (-3, 1) son ortogonales
E13c) dados $\mathbf{w}= (1, 2)$, $\mathbf{h}= (2,3)$, halle $proy_{\mathbf{w}}(\mathbf{h})$.

E14.- Demuestre (usando el símbolo "Σ") que una matriz nxn es ortogonal, si y sólo si sus filas (columnas) forman una base ortonormal para R^n .

E15.- Dada una matriz A (con componentes reales) , diga si es cierto o falso que el espacio nulo,($N_A \subseteq R^n$), de A es el complemento ortogonal del espacio de filas,($R_A \subseteq R^n$), de A.

respuestas.

SE1a) los dos vectores dados son perpendiculares uno al otro y ámbos tienen módulo =1 ;

SE1b) $\mathbf{w}= proy_H(\mathbf{m})=(\mathbf{m.u})\mathbf{u}+(\mathbf{m.v})\mathbf{v} = \frac{1}{3}((1, 3,-2).(2, 2, 1))\mathbf{u}+ \frac{1}{3}((1, 3,-2).(1,-2, 2)\mathbf{v} =$

$=2\mathbf{u}-3\mathbf{v}=\frac{1}{3}(1, 10,-4)$;

SE1c) $\mathbf{m}-\mathbf{w} = (1, 3,-2)-\frac{1}{3}(1, 10,-4) = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$;

$(\mathbf{m}-\mathbf{w}).\mathbf{u} = \frac{1}{9}(2,-1,-2)(2, 2, 1) = 0$;$(\mathbf{m}-\mathbf{w}).\mathbf{v} = \frac{1}{9}(2,-1,-2)(1,-2, 2) = 0$;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE1d) en **2c** se ha verificado que **m-w** es perpendicular a **u**, **v** ; de esto sigue que **m-w** es perpendicular a todo vector de H ;
en efecto, por la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma de vectores, y por la propiedad $\mathbf{u}.(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}.\mathbf{v})$, se tiene que si cierto vector, **k** es perpendicular a los vectores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$, entonces por consiguiente **k** es perpendicular a todo vector de gen($\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$).
En el caso del presente ejercicio, siendo H=gen(**u**, **v**), si $\mathbf{h} \in$ H entonces $\mathbf{h}=a.\mathbf{u}+\mathbf{b}.\mathbf{v}$, luego siendo **u**, **v** perpendiculares al vector **k**= **m-v** se tiene :
$\mathbf{k}.\mathbf{h} = \mathbf{k}.(a.\mathbf{u}+\mathbf{b}.\mathbf{v}) = a(\mathbf{k}.\mathbf{u})+b(\mathbf{k}.\mathbf{v}) = a.0+b.0 = 0$.

SE1e) como $\mathbf{h} \in$ H=gen(**u**, **v**), y como **u**, **v** forman una base ortonormal de H, la misma fórmula de la proyección de **h** sobre H , por medio de **u**, **v**, proporciona la combinación lineal pedida [esto se debe a que en este caso **h** coincide con su proyección sobre H].
Por lo tanto tenemos :

$$\mathbf{h} = \text{proy}_H(\mathbf{h}) = (\mathbf{h}.\mathbf{u})\mathbf{u}+(\mathbf{h}.\mathbf{v})\mathbf{v} = ((1, 0, 1).(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}))\mathbf{u}+((1, 0, 1)(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}))\mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{v} .$$

SE2a.-$\text{proy}_W(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}+(\mathbf{a}.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2}+(\mathbf{a}.\mathbf{u_3})\mathbf{u_3} = \sum_{k=1}^{3}(\mathbf{a}.\mathbf{u_k})\mathbf{u_k}$;

2b.- $\mathbf{b} = \text{proy}_W(\mathbf{b}) = (\mathbf{b}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}+(\mathbf{b}.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2}+(\mathbf{b}.\mathbf{u_3})\mathbf{u_3} = \sum_{k=1}^{3}(\mathbf{b}.\mathbf{u_k})\mathbf{u_k}$
ya que todo vector, **b**, del subespacio W coincide con su proyección ortogonal sobre W.

SE3.- $\mathbf{v}_4' = \mathbf{v}_4 - \sum_{k=1}^{3}(\mathbf{v}_4.\mathbf{u_k})\mathbf{u_k} = \mathbf{v}_4 - ((\mathbf{v}_4.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}+(\mathbf{v}_4.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2}+(\mathbf{v}_4.\mathbf{u_3})\mathbf{u_3})$;

$$\mathbf{u_4} = \frac{\mathbf{v}_4'}{|\mathbf{v}_4'|} .$$

SE4.- $\mathbf{u_1} = \frac{\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$;

$\mathbf{v_2}' = \mathbf{v_2} - (\mathbf{v_2}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1} = (1, 1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u_1} = \frac{1}{2}(1, 2, -1)$;

$\mathbf{u_2} = \frac{\mathbf{v_2}'}{|\mathbf{v_2}'|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$;

$\mathbf{v_3}' = \mathbf{v_3} - (\mathbf{v_3}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1} - (\mathbf{v_3}.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2} = (1, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{u_1} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{u_2} = \frac{1}{3}(-1, 1, 1)$;

$\mathbf{u_3} = \frac{\mathbf{v_3}'}{|\mathbf{v_3}'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE5.- $\mathbf{u_1}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, $\mathbf{u_2}=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$;
$\mathbf{v_3}=(1, 0, 0)$ [o cualquier vector linealmente independiente de los dos anteriores] ;
$\mathbf{v_3}' = \mathbf{v_3}-(\mathbf{v_3}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}-(\mathbf{v_3}.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2}= (1, 0, 0) - \frac{1}{9}(4, 4, 2) - \frac{1}{9}(1,-2, 2) = \frac{1}{9}(4,-2,-4)$;
$\mathbf{u_3}=\frac{\mathbf{v_3}'}{|\mathbf{v_3}'|} = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$.

SE6a.- Esta propiedad es válida para <u>cualquier subespacio</u>, H, de un espacio vectorial V.
i) $H^{\perp}\neq\emptyset$ ya que por ejemplo $\mathbf{o} \in H^{\perp}$ [el vector nulo es perpendicular a todo vector de V] ;
ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H^{\perp} \Rightarrow$ los vectores **x, y** son perpendiculares a todo vector, **v** de H $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{x}.\mathbf{v}=0, \ \mathbf{y}.\mathbf{v}=0 \Rightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{v}= \mathbf{x}.\mathbf{v}+ \mathbf{y}.\mathbf{v}=0+0 = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{y})\in H^{\perp}$
[cierre de $H^{\perp}$ respecto a la suma de vectores];
iii) $\mathbf{x}\in H^{\perp}$, $\lambda\in R\Rightarrow$ el vector **x** es perpendicular a todo vector, **v** de H $\Rightarrow$
$\Rightarrow [\ \mathbf{x}.\mathbf{v}=0 \Rightarrow (\lambda\mathbf{x}).\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{x}.\mathbf{v}) = \lambda.0 = 0 \Rightarrow (\lambda\mathbf{x})\in H^{\perp}\ ]$.
[cierre de $H^{\perp}$ respecto a la multiplicación por escalares].

SE6b.- Sean $\mathbf{v_1}=(2, 3, 0, 6)$, $\mathbf{v_2}=(6, 2, 0,-3)$ y construyamos una base ortonormal para $H=\text{gen}(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2})$; como $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$ son perpendiculares uno al otro, bastará dividir cada uno por su módulo : $\mathbf{u_1}=\frac{\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|} = \frac{1}{7}\mathbf{v_1}= \frac{1}{7}(2, 3, 0, 6)$, $\mathbf{u_2}=\frac{\mathbf{v_2}}{|\mathbf{v_2}|} = \frac{1}{7}\mathbf{v_2}= \frac{1}{7}(6, 2, 0,-3)$
$\mathbf{h}=\text{proy}_H(1, 2, 1, 1) = \frac{1}{7}((1, 2, 1, 1).(2, 3, 0, 6)\mathbf{u_1}+ \frac{1}{7}((1, 2, 1, 1).(6, 2, 0,-3))\mathbf{u_2} =2\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}$;
como $\mathbf{w}-\mathbf{h} \in H^{\perp}$, será $\mathbf{p} =\mathbf{w}-\mathbf{h}= (1, 2, 1, 1) - (2\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}) = \frac{1}{7}((-3, 6, 7,-2)$.

SE6c.- si $\mathbf{w}= \mathbf{h}+\mathbf{p}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$, con $\mathbf{h}, \mathbf{a} \in H$, $\mathbf{p}, \mathbf{b} \in H^{\perp}$, entonces $\mathbf{h}-\mathbf{a} = \mathbf{b}-\mathbf{p} \in H\cap H^{\perp}$;
como el único vector perpendicular a si mismo es el vector nulo, sigue :
$\mathbf{h}-\mathbf{a} = \mathbf{b}-\mathbf{p}= \mathbf{o}$ por lo cual $\mathbf{h}=\mathbf{a}$, $\mathbf{p}=\mathbf{b}$.

SE7a.- Apliquemos el algoritmo de Gram-Schmidt a los tres vectores que generan el subespacio dado, (1, 0, 1), (2, 1, 0), (1,-1, 3) ;
Observación importante.
Si se aplica el algoritmo de Gram-Schmidt a un conjunto de vectores linealmente independientes, se obtiene un nuevo conjunto de vectores dos a dos perpendiculares y de módulo =1;
si en cierta etapa del proceso se encuentra un vector que <u>no es</u> linealmente independiente de los anteriores, digamos el k-ésimo vector, $\mathbf{v_k}$, entonces el cálculo de
$\mathbf{v_k}' = \mathbf{v_k}-(\mathbf{v_k}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}-(\mathbf{v_k}.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2}- \dots - (\mathbf{v_{k-1}}.\mathbf{u_{k-1}})\mathbf{u_{k-1}}= \mathbf{o}$ proporciona el vector <u>nulo</u> ,
por ser $\mathbf{v_k}$ combinación lineal de los $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots\mathbf{u_{k-1}}$ y por lo tanto igual a su proyección sobre $\text{gen}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots\mathbf{u_{k-1}}\}$.

Este hecho no causa ningún problema : simplemente toda vez que cierto $\mathbf{v_k}'$ sea el vector nulo, se desecha, ya que no puede formar parte de un conjunto de vectores linealmente independientes.

$\mathbf{v_1}=(1, 0, 1)$, $\mathbf{v_2}=(2, 1, 0)$, $\mathbf{v_3}=(1,-1, 3)$;

$$\mathbf{u_1}= \frac{\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) ;$$

$$\mathbf{v_2}'= \mathbf{v_2} - (\mathbf{v_2}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1} = (2, 1, 0) - [(2, 1, 0).\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)]\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) =$$

$=(2, 1, 0)-(1, 0, 1) = (1, 1,-1)$;

$$\mathbf{u_2}= \frac{\mathbf{v_2}'}{|\mathbf{v_2}'|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) ;$$

$$\mathbf{v_3}'= \mathbf{v_3} - (\mathbf{v_3}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1} - (\mathbf{v_3}.\mathbf{u_2})\mathbf{u_2} = (1,-1, 3) - [\frac{4}{2}(1, 0\ 1)+\frac{-3}{3}(1, 1,-1)] =$$

$= (1,-1, 3) -(1,-1, 3) = \mathbf{o} \implies \mathbf{v_3}$ es combinación lineal de los anteriores;

Entonces H= gen{(1, 0, 1), (2, 1, 0)} y una base ortonormal para H es :

$$\mathbf{u_1}= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) , \mathbf{u_2}= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) ;$$

SE7b.- $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_H(\mathrm{w}) = \text{proy}_H(3, 4, 1) =$
$= ((3, 4, 1).\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}+((3, 4, 1).\mathbf{u_2})\mathbf{u_2}= (2, 0, 2)+(2, 2,-2) = (4, 2, 0)$

SE7c. halle $H^\perp$ (= complemento ortogonal de H);

$$(x, y, z)\in H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases}(x, y, z).(1, 0, 1)=0\\(x, y, z).(2, 1, 0)=0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&1&0&0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$H^\perp$=gen{(-1, 2, 1)} .

SE7d.-$\mathbf{w}_2$= $\text{proy}_{H^\perp}(\mathrm{w}) = \frac{(3, 4, 1)(-1, 2, 1)}{6}(-1, 2, 1) = \frac{6}{6}(-1, 2, 1) =(-1, 2, 1)$

SE7e.-$\mathbf{w}_1+ \mathbf{w}_2 = (4, 2, 0)+(-1, 2, 1) = (3, 4, 1) = \mathbf{w}$.

SE8.- Para que una función $V\times V\to R$ que asocia a cada par ordenado, (f, g), de vectores de cierto espacio vectorial, V, un número real, <f, g>, sea un producto interno, debe cumplir con las propiedades que se indican a continuación.[ver propiedades enunciadas en la definición 1 de pag. 439 del texto (5a edición de Grossman ; sección 4.11)] :

i) $\langle f, f\rangle \geq 0$ (para toda escogencia de f) ;
ii) $\langle f, f\rangle = 0$ si y sólo si f=0 ;
iii) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$,[propiedad conmutativa] ;
iv) $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$ [propiedad distributiva] ;
v) $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle = \langle f, \lambda g\rangle$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

observación.
Las propiedades de la definición 1 de la sección 4.11 del texto de Grossman, son las que se exigen cuando se consideran escalares complejos ; si los escalares son reales como es nuestro caso, estas propiedades se pueden enunciar como lo acabamos de hacer aqui.

SE9.- Como en R^2, R^3, el módulo de un vector,**u**, es igual a la raíz cuadrada del producto escalar **u.u** : $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u.u}}$, podemos definir, en un espacio vectorial con producto interno cualquiera [e inclusive, en R^2, R^3, con otros productos internos, diferentes del usual producto escalar],

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{<\mathbf{u}, \mathbf{u}>} \ ;$$

análogamente, como en R^2, R^3, dos vectores **u**, **v** son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es nulo, podemos definir, en un espacio vectorial con producto interno cualquiera : " dos vectores **u**, **v** son perpendiculares si y sólo si su producto interno es nulo : $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow <\mathbf{u}, \mathbf{v}> = 0$ ".

SE10a. -El hecho que $< f , g > = \int_0^2 f(x)g(x)dx$ define un producto interno en el espacio vectorial, P_2, de todos los polinomios de grado ≤ 2 es fácil de verificar, recordando algunas propiedades de las funciones reales continuas (como lo son los polinomios) y de las integrales definidas.

A título de ejemplo :

$$< f, g+h > = \int_0^2 f(x)(g(x)+h(x))dx = \int_0^2 f(x)g(x)dx + \int_0^2 f(x)h(x)dx = <f, g> + <f, h> .$$

La menos inmediata de las propiedades a verificar, es la ii) .

Está claro que si f es la función nula entonces $<f, f> = <0, 0> = \int_0^2 0dx = 0$.

Inversamente, si f no es el polinomio nulo, entonces seguramente hay un número, a, interno al intervalo [0, 2] donde $f(a) \neq 0$; por ser los polinomios funciones continuas, existe un intervalo abierto $(a-d, a+d) \subseteq [0, 2]$,en el cual se cumpla $|f(x)| \geq \frac{|f(a)|}{2}$; por consiguiente entonces se tiene :

$$< f, f> = \int_0^2 f(x)f(x)dx = \int_0^{a-d} f^2(x)dx + \int_{a-d}^{a+d} f^2(x)dx + \int_{a+d}^2 f^2(x)dx \geq 0 + \frac{d}{2}|f(a)|^2 + 0 > 0.$$

SE10b) $|1| = \sqrt{2}$; $|x| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $|x^2+x-1|^2 = \int_0^2 (x^2+x-1)^2dx = \frac{146}{15}$; $|x^2+x-1| = \sqrt{\frac{146}{15}}$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

SE10c) Escribamos la condición para que el más general vector de P_2 , $a_0+a_1x+a_2x^2$, sea perpendicular al vector x : $\int_0^2 x.(a_0+a_1x+a_2x^2)dx = 0$.

$\int_0^2 (a_0x+a_1x^2+a_2x^3)dx = 2a_0+\frac{8}{3}a_1+4a_2=0 \Rightarrow a_0= -\frac{4}{3}a_1-2a_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0+a_1x+a_2x^2= (-\frac{4}{3}a_1-2a_2)+a_1x+a_2x^2 = a_1(x-\frac{4}{3})+a_2(x^2-2)$;

si llamamos H= gen{x} , entonces el conjunto de todos los polinomios de P_2 perpendiculares al polinomio x es el complemento ortogonal, $H^{\perp}= \text{gen}\{x-\frac{4}{3}, x^2-2\}$.

SE11) Una base (la base natural) para P_1 es (1, x) ; construyamos ahora una base ortonormal, mediante el algoritmo de Gram-Schmidt :

$\mathbf{u_1}= \frac{1}{|1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\mathbf{v_2}' =\mathbf{v_2}-(\mathbf{v_2}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}$;

$\mathbf{v_2}.\mathbf{u_1}= \int_0^2 x.\frac{1}{\sqrt{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.2 =\sqrt{2}$;

$\mathbf{v_2}' =\mathbf{v_2}-(\mathbf{v_2}.\mathbf{u_1})\mathbf{u_1}= x - (\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}} = x-1$; el polinomio (x-1) es ortogonal a $\mathbf{u_1}$ pero todavía no tiene módulo =1 ; $|x-1|^2= \int_0^2 (x-1)^2dx = \frac{2}{3}$;

$\mathbf{u_2}=\frac{\mathbf{v_2}'}{|\mathbf{v_2}'|} = \frac{x-1}{\sqrt{2/3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x-1)$.

SE12a) si $f=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $g= b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$
sea $<f, g> = (a_0, a_1, a_2, a_3).(b_0, b_1, b_2, b_3) = a_0b_0+ a_1b_1+ a_2b_2+a_3b_3$;

SE12b) si $A= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B= \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, sea $<A, B> = (a, b, c, d).(a', b', c', d') =aa'+bb'+cc'+dd'$.

SE13.- Observemos que $< \mathbf{u}, \mathbf{v}> = \mathbf{u}^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = [u_1, u_2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$;

13a) $|(1, 0)|^2= [1, 0]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2, 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2$; $|(1, 0)|= \sqrt{2}$;

13b) $<(1, 3), (-3, 1)> = [1, 3]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = [5, 7] \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = -8 \neq 0$; <u>no</u> son ortogonales;

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

13c) $\text{proy}_{\mathbf{w}}(\mathbf{h}) = \dfrac{(\mathbf{h.w})}{|\mathbf{w}|^2}\mathbf{w}$ **;** $\mathbf{h.w} = [2, 3]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [7, 8]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 23$;

$|\mathbf{w}|^2 = [1, 2]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [4, 5]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 14$; $\text{proy}_{\mathbf{w}}(\mathbf{h}) = \dfrac{23}{14}\mathbf{w} = \dfrac{23}{14}(1, 2)$.

SE14) Sea $\mathbf{u}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n})$ el i-ésimo vector fila de la matriz A.
La matriz A es ortogonal si y sólo si $A^t = A^{-1}$, si y sólo si $AA^t = I_n = [\delta_{i,j}]$, donde $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{i,i} = 1$. Si indicamos con B la matriz transpuesta de A, tenemos entonces :

"A es ortogonal"$\Leftrightarrow AB = I_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} = \mathbf{u}_i . \mathbf{u}_j = \delta_{i,j}$.

Basta entonces observar que las condiciones $\mathbf{u}_i . \mathbf{u}_j = \delta_{i,j}$ indican que el i-ésimo vector fila de la matriz A tiene módulo =1 y que dos vectores filas diferentes son mutuamente ortogonales.
En el caso particular, de las matrices de tamaño 2x2, tendríamos, sin usar el símbolo "sigma" para sumatorias :
Sean $\mathbf{u} = (a_{1,1}, a_{1,2})$, $\mathbf{v} = (a_{2,1}, a_{2,2})$; la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{bmatrix}$ es ortogonal si y sólo si

$$A^t = A^{-1} \Leftrightarrow AA^t = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{1,1}, & a_{2,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2} \end{bmatrix} = I_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{1,1})^2 + (a_{1,2})^2 = 1 \\ a_{1,1}a_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} = 0 \\ a_{2,1}a_{1,1} + a_{2,2}a_{1,2} = 0 \\ (a_{2,1})^2 + (a_{2,2})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\mathbf{u}|^2 = 1 \\ \mathbf{u.v} = 0 \\ \mathbf{v.u} = 0 \\ |\mathbf{v}|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \text{ es base ortonormal para } R^2 .$$

Nota. Para justificar que una matriz nxn es ortogonal, si y sólo si tambien sus <u>columnas</u> forman una base ortonormal para R^n , basta observar que una matriz es ortogonal si y sólo si su transpuesta es ortogonal.

SE15.- Es cierto, ya que los vectores fila, soluciones del sistema homogéneo A**x**=**o** son exactamente aquellos que cumplen con la condición de ser ortogonales a cada una de las filas de la matriz, es decir, ser ortogonales a cada uno de los vectores de un conjunto de generadores del espacio de filas.